О ПРОЧНОСТИ

СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ.

А. Веребрюсова.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія Адольфа Дарре, Рыбная улица № 28.
1888.

О ПРОЧНОСТИ

СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ.

1. Возьмемъ извѣстныя выраженія координатъ планеты:

$$\left.\begin{aligned} x&=r\left(\cos(v+\pi-\theta)\cos\theta-\sin(v+\pi-\theta)\sin\theta\cos i\right)\\ y&=r\left(\cos(v+\pi-\theta)\sin\theta+\sin(v+\pi-\theta)\cos\theta\cos i\right)\\ z&=r\sin(v+\pi-\theta)\sin i\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Дифференцируя первое равенство и принимая во вниманіе, что

$$\frac{dr}{dt}=\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}e\sin v,\quad r\frac{dv}{dt}=\frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{r}=\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}(1+e\cos v),$$

получимъ

$$\frac{dx}{dt}=\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\left[\begin{aligned} &e\sin v\left(\cos(v+\pi-\theta)\cos\theta-\sin(v+\pi-\theta)\sin\theta\cos i\right)\\ -&(1+e\cos v)\left(\sin(v+\pi-\theta)\cos\theta+\cos(v+\pi-\theta)\sin\theta\cos i\right)\end{aligned}\right]$$

Члены, умноженные на e, приводятся къ формѣ $-e\,[\sin(\pi-\theta)\cos\theta+$ $+\cos(\pi-\theta)\,sm\,\theta\cos i]$, въ которой множитель e получается изъ прочихъ членовъ при $v=o$. Такимъ образомъ получимъ слѣдующія выраженія производныхъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\left[\begin{aligned}&-\sin(v+\pi-\theta)\cos\theta-\cos(v+\pi-\theta)\sin\theta\cos i\\ &-e\left(\sin(\pi-\theta)\cos\theta+\cos(\pi-\theta)\sin\theta\cos i\right)\end{aligned}\right]\\ \frac{dy}{dt}&=\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\left[\begin{aligned}&-\sin(v+\pi-\theta)\sin\theta+\cos(v+\pi-\theta)\cos\theta\cos i\\ &+e\left(-\sin(\pi-\theta)\sin\theta+\cos(\pi-\theta)\cos\theta\cos i\right)\end{aligned}\right]\\ \frac{dz}{dt}&=\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\left[\cos(v+\pi-\theta)\sin i+e\cos(\pi-\theta)\sin i\right]\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

2. Намъ извѣстны только четыре конечныхъ интеграла уравненій движенія планетъ; означая $M=1+m+m'+\ldots$, получимъ уравненіе живыхъ силъ

$$\Sigma\, m\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}+\Sigma\, mm'\frac{(dx-dx')^2+(dy-dy')^2+(dz-dz')^2}{dt^2}=$$
$$=C+k^2M\left(\Sigma\frac{m}{r}+\Sigma\frac{mm'}{\triangle}\right)$$

и уравненія площадей:

$$\Sigma\, m\frac{ydz-zdy}{dt}+\Sigma\, mm'\frac{(y-y')d(z-z')-(z-z')d(y-y')}{dt}=C_1$$

$$\Sigma\, m\frac{xdz-zdx}{dt}+\Sigma\, mm'\frac{(x-x')d(z-z')-(z-z')d(x-x')}{dt}=C_2$$

$$\Sigma\, m\frac{xdy-ydx}{dt}+\Sigma\, mm'\frac{(x-x')d(y-y')-(y-y')d(x-x')}{dt}=C_3$$

3. Въ способѣ измѣненія постоянныхъ произвольныхъ удерживаются для координатъ и ихъ первыхъ производныхъ выраженія эллиптическія (1) и (2), но элементы планетъ разсматриваются перемѣнными, опредѣляемыми изъ извѣстныхъ уравненій, которыя мы для краткости будемъ называть уравненіями Лагранжа. Послѣднимъ уравненіямъ должны удовлетворять и вышеприведенные четыре интеграла, послѣ того, какъ мы въ нихъ координаты и ихъ производныя замѣнимъ выраженіями черезъ время и элементы. И такъ намъ извѣстны четыре конечныхъ интеграла для уравненій Лагранжа*).

4. Этимъ интеграламъ дадимъ такую форму:

$$\Sigma\, m(M-m)\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}-2\,\Sigma\, mm'\frac{dx\,dx'+dy\,dy'+dz\,dz'}{dt^2}=$$
$$=C+k^2M\left(\Sigma\frac{m}{r}+\Sigma\frac{mm'}{\triangle}\right)$$

$$\Sigma\, m(M-m)\frac{ydz-zdy}{dt}=C_1+\Sigma\, mm'\frac{ydz'-zdy'+y'dz-z'dy}{dt}$$

$$\Sigma\, m(M-m)\frac{xdz-zdx}{dt}=C_2+\Sigma\, mm'\frac{xdz'-zdx'+x'dz-z'dx}{dt}$$

$$\Sigma\, m(M-m)\frac{xdy-ydx}{dt}=C_3+\Sigma\, mm'\frac{xdy'-ydx'+x'dy-y'dx}{dt}$$

*) См. Ковальскаго, Теорія Нептуна 1852, стр. 43. „До сихъ поръ не получено ни одного интеграла уравненій (30)“. Также у Хандрикова, Очеркъ теор. астр. 1883, стр. 278. „Но до сихъ поръ не получено ни одного конечнаго интеграла уравненій (391)“.

Вслѣдствіе извѣстныхъ формулъ:

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=k^2(1+m)\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right),\ \frac{ydz-zdy}{dt}=na^2\sqrt{1-e^2}\,sin\,i\,sin\,\theta$$

$$\frac{xdz-zdx}{dt}=na^2\sqrt{1-e^2}\,sin\,i\,cos\,\theta,\ \frac{xdy-ydx}{dt}=na^2\sqrt{1-e^2}\,cos\,i$$

и называя для краткости

$$m(M-m)\,na^2\sqrt{1-e^2}=q=k\,m(M-m)\sqrt{1+m}\sqrt{a(1-e^2)} \quad (3)$$

получимъ

$$\Sigma\frac{m(1+m)(M-m)}{a}=-\frac{C}{k^2}+\Sigma\frac{m(m'+m''+..)}{r}-M\Sigma\frac{mm'}{\triangle}-$$
$$-\frac{2}{k^2}\Sigma mm'\frac{dxdx'+dydy'+dzdz'}{dt^2} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\,q\,sin\,i\,sin\,\theta &= Q\,sin\,J\,sin\,\Theta+\Sigma\,mm'\frac{ydz'-zdy'+y'dz-z'dy}{dt}\\ \Sigma\,q\,sin\,i\,cos\,\theta &= Q\,sin\,J\,cos\,\Theta+\Sigma\,mm'\frac{xdz'-zdx'+x'dz-z'dx}{dt}\\ \Sigma\,q\,cos\,i &= Q\,cos\,J\qquad\quad\ +\Sigma\,mm'\frac{xdy'-ydx'+x'dy-y'dx}{dt}\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

гдѣ постоянныя C_1, C_2 и C_3 замѣнены постоянными Q, J и Θ, опредѣляющими положеніе неизмѣняемой плоскости и наибольшую сумму проэкцій площадей.

5. Уравненія (4) и (5) точныя; слѣд. ихъ можно употреблять въ задачѣ трехъ тѣлъ для опредѣленія вѣковыхъ и періодическихъ возмущеній элементовъ a, e, i и θ одной планеты, когда извѣстны возмущенія другой; возмущенія получаются въ конечной формѣ безъ квадратуръ.

Для полученія вѣковыхъ возмущеній надо въ этихъ уравненіяхъ удержать только постоянные члены.

$\frac{1}{r}$ содержитъ постоянный членъ $\frac{1}{a}$, который можетъ быть перенесенъ въ лѣвую часть уравненія.

$\Sigma\frac{mm'}{\triangle}$ имѣетъ постоянный членъ F, который, какъ нетрудно доказать, есть абсолютная постоянная при вѣковыхъ возмущеніяхъ. Въ самомъ дѣлѣ, если въ пертурбаціонной функціи будемъ разсматривать только первую часть $\frac{m'}{\triangle}$, такъ какъ вторая часть періодическая и назовемъ $\frac{1}{\triangle}$ черезъ R_{01}, то пертурбаціонныя функціи разныхъ планетъ R, R', R''... можно представить такъ:

$$R = m' R_{01} + m'' R_{02} + m''' R_{03} + ..$$
$$R' = m R_{01} + m'' R_{12} + m''' R_{13} + ..$$
$$R'' = m R_{02} + m' R_{12} + m''' R_{23} + ..$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Пертурбаціонная функція не содержитъ элементовъ, а только координаты; вслѣдствіе этого, а также основнаго положенія измѣненія постоянныхъ произвольныхъ, по которому при измѣненіи постоянныхъ координаты не измѣняются, для всякой функціи координатъ, означая черезъ $a, b,..$ постоянныя, получимъ

$$\frac{dR}{da}\frac{da}{dt} + \frac{dR}{db}\frac{db}{dt} + \dots = o$$

Поэтому

$$\Sigma\, m \frac{dR}{da}\frac{da}{dt} = o,\ \ \Sigma\, m' \frac{dR'}{da'}\frac{da'}{dt} = o,\ \ \Sigma\, m'' \frac{dR''}{da''}\frac{da''}{dt} = o \dots$$

Составимъ функцію F изъ всѣхъ членовъ разныхъ $m\,R$, именно

$$F = mm' R_{01} + mm'' R_{02} + m'm'' R_{12} + \dots$$

отличающуюся отъ $m\,R$, $m'\,R'$,.. тѣми членами, которые не содержатъ элементовъ соотвѣтствующей планеты; тогда

$$\Sigma\,\frac{dF}{da}\frac{da}{dt} = o,\ \Sigma\,\frac{dF}{da'}\frac{da'}{dt} = o\ \ \dots.$$

Если при этомъ изъ каждаго R_{01} возьмемъ постоянный членъ, то сумма послѣднихъ равенствъ дастъ полный дифференціалъ F, такъ что получимъ интегралъ для вѣковыхъ возмущеній

$$F = \frac{mm'}{\triangle} + \frac{mm''}{\triangle'} + \frac{m'm''}{\triangle''} + .. = C_1$$

гдѣ всѣ $\frac{1}{\triangle}$ замѣнены постоянными членами.

Заключаемъ, что въ уравненіи (4) отъ члена $\Sigma\,\frac{mm'}{\triangle}$ не будетъ функціи элементовъ, а абсолютная постоянная.

6. Разсмотримъ, нѣтъ ли постояннаго члена въ $dx\,dx' + dy\,dy' + dz dz'$. Изъ формулъ (2) видно, что если назовемъ черезъ k точку на орбитѣ впереди планеты на 90^0, а k_0 тоже при $v = o$, то получимъ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\left(\cos(k,x) + e\cos(k_0,x)\right)$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\left(\cos(k,y)+e\cos(k_0,y)\right)$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\left(\cos(k,z)+e\cos(k_0,z)\right)$$

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{n'a'}{\sqrt{1-e'^2}}\left(\cos(k',x)+e'\cos(k'_0,x)\right)$$

$$\frac{dy'}{dt}=\frac{n'a'}{\sqrt{1-e'^2}}\left(\cos(k',y)+e'\cos(\kappa'_0 y)\right)$$

$$\frac{dz'}{dt}=\frac{n'a'}{\sqrt{1-e'^2}}\left(\cos(k',z)+e'\cos(k'_0,z)\right)$$

Отсюда имѣемъ

$$\frac{dx\,dx'+dy\,dy'+dz\,dz'}{dt^2}=\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{n'a'}{\sqrt{1-e'^2}}\Big[\cos(k,k')+e\cos(k_0,k')+$$
$$+e'\cos(k,k'_0)+ee'\cos(k_0,k'_0)\Big]$$

Въ произведеніяхъ, напр. $\cos(v+\pi-\theta)\sin(v'+\pi'-\theta')$, надо брать только постоянные члены каждаго множителя; такъ какъ $\sin v$ не имѣетъ постояннаго члена, а $\cos v$ имѣетъ членъ $-e$, то $\cos(v+\pi-\theta)=$ $=\cos v\cos(\pi-\theta)-\sin v\sin(\pi-\theta)$ имѣетъ постоянный членъ $-e\cos(\pi-\theta)$; для полученія его надо поэтому въ $\cos(v+\pi-\theta)$ сдѣлать $v=o$ и умножить на $-e$; такимъ образомъ изъ $\cos(v+\pi-\theta)\sin(v'+\pi'-\theta')$ получаемъ $+ee'\cos(\pi-\theta)\sin(\pi'-\theta')$. Поэтому $\cos(k,k')$ имѣетъ постоянный членъ $+ee'\cos(k_0k_0')$; $\cos(k_0,k')$ имѣетъ членъ $-e'\cos(k_0,k'_0)$; $\cos(k',k'_0)$ имѣетъ членъ $-e\cos(k_0,k'_0)$; внеся все это въ выраженіе $dx\,dx'+$ и пр., увидимъ, что постоянные члены уничтожатся.

Итакъ уравненіе живыхъ силъ даетъ

$$\Sigma\,\frac{m(1+m[1+m'+m''+\ldots])}{a}=\text{пост.}$$

или почти

$$\frac{m}{a}+\frac{m'}{a'}+\frac{m''}{a''}+\ldots=\text{пост.}\quad ..\ (7)$$

7. Обратимся теперь къ уравненіямъ площадей (5) и посмотримъ, нѣтъ ли постояннаго члена въ выраженіяхъ вида $ydz'-zdy'$. Если назовемъ черезъ l точку, въ которой находится планета, а l_0 тоже при $v=o$, то

$$x=r\cos(l,x)\qquad y=r\cos(l,y)\qquad z=r\cos(l,z)$$

и для $ydz'-zdy'$ получимъ

$$\frac{ydz'-zdy'}{dt}=r\frac{n'a'}{\sqrt{1-e'^2}}\left[\begin{array}{l}\cos(l,y)\cos(k',z)-\cos(l,z)\cos(k',y)\\+e'\left(\cos(l,y)\cos(k'_0,z)-\cos(l,z)\cos(k'_0,y)\right)\end{array}\right]$$

Такъ какъ $r\sin v$ не имѣетъ постояннаго члена, а $r\cos v$ имѣетъ $-\frac{3}{2}ae$, то $r\cos(v+\pi-\theta)$ имѣетъ членъ $-\frac{3}{2}ae\cos(\pi-\theta)$; для полученія этого надо въ $r\cos(v+\pi-\theta)$ сдѣлать $v=o$, $r=a$ и умножить на $-\frac{3}{2}e$; поэтому будутъ постоянные члены въ

$$r\cos(l,y)\cos(k',z)=+\frac{3}{2}aee'\cos(l_0,y)\cos(k'_0,z)$$

$$r\cos(l,z)\cos(k',y)=+\frac{3}{2}aee'\cos(l_0,z)\cos(k_0',y)$$

$$r\cos(l,y)\cos(k_0',z)=-\frac{3}{2}ae\cos(l_0,y)\cos(k'_0,z)$$

$$r\cos(l,z)\cos(k'_0,y)=-\frac{3}{2}ae\cos(l_0,z)\cos(k'_0,y)$$

Внеся это, получимъ нуль. Тоже самое для $y'dz-z'dy$ и тому подобныхъ выраженій. Поэтому получаемъ для вѣковыхъ возмущеній интегралы точные до всѣхъ порядковъ относительно массъ:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma\, q\sin i\sin\theta=Q\sin J\sin\Theta\\ \Sigma\, q\sin i\cos\theta=Q\sin J\cos\Theta\\ \Sigma\, q\cos i\qquad\;\;=Q\cos J\end{array}\right\}\quad\ldots\quad(8)$$

8. Эти уравненія показываютъ, что ломаная, составленная изъ прямыхъ $q, q', \ldots$, проведенныхъ перпендикулярно къ орбитамъ планетъ, опирается на прямую Q, перпендикулярную къ неизмѣняемой плоскости; свойство это можно выразить и такъ: если составить цѣпь изъ звеньевъ $q, q', \ldots$, одинъ конецъ ея укрѣпить въ центрѣ солнца, а другой на перпендикулярѣ къ неизмѣняемой плоскости изъ центра солнца на разстояніи Q, то измѣненія положеній орбитъ планетъ представятся возможными перемѣщеніями звеньевъ цѣпи. Юпитеру принадлежитъ звено, составляющее болѣе половины всей цѣпи; поэтому и колебанія орбиты Юпитера очень малы.

Для опредѣленія предѣловъ вѣковыхъ возмущеній планетъ возьмемъ элементы для 1850 года по Леверье, а для Урана и Нептуна по Ньюкомбу, отбросимъ k въ q и умножимъ всѣ числа на 10^{10}; тогда получимъ слѣдующую таблицу; въ которой φ уголъ эксцентрицитета.

	Меркурій	Венера	Земля	Марсъ	Юпитеръ
$q \sec \varphi$	816	20 663	31 020	4 000	21 785 780
q	798	20 662	31 016	3 983	21 760 400
$q \cos i$	792	20 626	31 016	3 981	21 754 700
$q \sin i$	97	1 223	0	129	498 052
$q \sin i \sin \theta$	71	1 183	0	96	492 004
$q \sin i \cos \theta$	67	310	0	85	— 77 381

	Сатурнъ	Уранъ	Нептунъ	Суммы
$q \sec \varphi$	8 760 772	1 940 995	2 833 260	35 377 306
q	8 746 990	1 938 908	2 833 162	35 335 917
$q \cos i$	8 738 702	1 938 732	2 831 790	35 320 339
$q \sin i$	380 682	26 140	88 149	994 472
$q \sin i \sin \theta$	352 090	25 030	67 402	937 876
$q \sin i \cos \theta$	— 144 748	7 536	— 56 809	— 270 940

По этимъ величинамъ находимъ

$$\Theta = 106^0\ 6'\ 47''.\ 91$$
$$J = \ \ 1\ 34\ 59.\ 52$$
$$Q = \ \ 35\ 333\ 830.$$

9. Разсматривая въ первомъ изъ (8) $q \sin i$, какъ постоянныя, мы получимъ наименьшую величину $\sin \theta$, если вмѣсто прочихъ $\sin \theta'$ возьмемъ по единицѣ; тогда

$$q \sin \theta > Q \sin J \sin \Theta - \Sigma q' \sin i'$$

Но такъ какъ $\Sigma q' \sin i' = \Sigma q \sin i - q \sin i$ и разность $\Sigma q \sin i - Q \sin J \sin \Theta = 56\ 596$, то

$$\sin \theta > \frac{q \sin i - 56596}{q \sin i}$$

Отсюда видно, что $\sin \theta$ имѣетъ предѣлъ только для тѣхъ планетъ, для которыхъ $q \sin i > 28\ 298$, слѣд. только для Юпитера, Сатурна и Нептуна.

Вычисляя по этой формулѣ, находимъ, что θ заключается для

Юпитера между $62^0\,25'\,12''$ и $117^0\,34'\,48''$
Сатурна „ 58 21 23 „ 121 38 37
Нептуна „ 20 58 28 „ 159 1 32.

10. По второму изъ (8) получимъ наибольшую величину $\cos \theta$, взявши вмѣсто прочихъ $\cos \theta'$ ихъ наименьшія величины, —1, для всѣхъ

планетъ кромѣ Юпитера, Сатурна и Нептуна, для которыхъ надо взять соотвѣтственно $\theta = 117^0$, 121^0 и 159^0; тогда для Юпитера, Сатурна и Нептуна $q \sin i \cos \theta$ будутъ

$$-230\ 591 \qquad -199\ 718 \qquad -82\ 308$$

и наименьшая величина $\Sigma\, q \sin i \cos \theta = -504\ 619$, такъ что

$$\cos\theta < \frac{233679 + q \sin i \cos \theta_0}{q \sin i},$$

гдѣ $\cos\theta_0$ наименьшая величина $\cos\theta$. Вычисляя, находимъ, что для

Юпитера	$\theta >$	$89^0\ 38'\ 41''$
Сатурна	$\theta >$	$84\ \ 52\ \ 54$

Для Нептуна нѣтъ предѣла $\cos\theta$. Соединяя предѣлы $\sin\theta$ и $\cos\theta$, заключаемъ, что долгота восходящаго узла заключена для

Юпитера	между	$89^0\ 38'\ 41''$	и	$117^0\ 34'\ 48''$
Сатурна	„	$84\ \ 52\ \ 54$	„	$121\ \ 38\ \ 37$
Нептуна	„	$20\ \ 58\ \ 28$	„	$159\ \ 1\ \ 32$

11. Звено цѣпи q будетъ наиболѣе отклонено отъ Q, если прочія звенья расположатся по прямой, такъ что составится треугольникъ, котораго стороны q, Q и $\Sigma q' = \Sigma q - q$. Полупериметръ этого треугольника p постоянный и равенъ $\frac{1}{2}(\Sigma q + Q) = 35\ 334\ 873$; $p - Q = 1043$; поэтому, называя наибольшее отклоненіе плоскости орбиты отъ неизмѣняемой плоскости черезъ α, получимъ

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1043}{Q}\,\frac{p-q}{q}}$$

Вычисляя, получаемъ для Юпитера $\alpha = 0^0\ 29'\ 31''$, Сатурна $1^0\ 5'\ 8''$, Урана $2^0\ 35'\ 3''$ и Нептуна $2^0\ 6'\ 32''$. Отсюда слѣдуетъ, что наклоненіе орбиты планеты къ эклиптикѣ 1850 года можетъ измѣняться отъ $J - \alpha$ до $J + \alpha$ или для

Юпитера	отъ	$1^0\ 5'\ 29''$	до	$2^0\ 4'\ 31''$
Сатурна	„	$0\ \ 29\ \ 52$	„	$2\ \ 40\ \ 8$
Урана	„	$1\ \ 0\ \ 3$	„	$4\ \ 10\ \ 3$
Нептуна	„	$-0\ \ 31\ \ 32$	„	$3\ \ 41\ \ 32$

Для малыхъ планетъ получатся предѣлы болѣе отдаленные, а для Меркурія даже нѣтъ предѣловъ, такъ какъ для него $q < 1043$.

12. При измѣненіи эксцентрицитетовъ будутъ измѣняться и q; но измѣненія эти ограничены тѣмъ, что сумма q всегда больше $Q = 35\ 333\ 830$ и меньше $\Sigma\, q \sec\varphi = 35\ 377\ 306$; послѣдній предѣлъ слишкомъ далекъ, такъ какъ всѣ эксцентрицитеты не могутъ быть одновременно нулями. Такъ какъ для насъ важно существованіе пре-

дѣловъ эксцентрицитетовъ, а не самые предѣлы, то не будемъ опредѣлять ихъ.

13. Обратимся теперь къ (6). Постоянная часть $\frac{1}{\triangle}$ неизвѣстна намъ въ конечной формѣ; если же разложимъ ее въ рядъ по степенямъ эксцентрицитетовъ и наклоненій, то до втораго порядка, и отбросивъ постоянную часть, получимъ (Т. Непт. стр. 31).

$$\Sigma \frac{mm'}{\sqrt{a^2+a'^2}} \left[\left(e^2 + e'^2 - 4 \sin^2 \frac{(i,i')}{2} \right) k \frac{dA_0^{(1)}}{dk} - 2\, ee' \cos(\pi - \pi') k A_2^{(3)} \right] = пост$$

Но съ тѣмъ же приближеніемъ выраженія

$$\frac{dF}{di}\frac{de}{dt} + \frac{dF}{d\pi}\frac{d\pi}{dt}$$

$$\frac{dF}{di}\frac{di}{dt} + \frac{dF}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

равны нулю; поэтому интегралъ $F = пост$ распадается на два

$$\Sigma \frac{mm'}{\sqrt{a^2+a'^2}} \left[(e^2 + e'^2) k \frac{dA_0^{(1)}}{dk} - 2\, ee' \cos(\pi - \pi') k A_2^{(3)} \right] = пост.$$

$$\Sigma \frac{mm'}{\sqrt{a^2+a'^2}} k \frac{dA_0^{(1)}}{dk} \sin^2 \frac{(i,i')}{2} = пост.$$

На этомъ мы остановимся пока.

Сочиненія А. Веребрюсова.

Задача Кеплера. Удостоено золотой медали. Харьковъ 1869. Ц. 40 к.

Введеніе въ сферическую астрономію. Харьковъ 1871. Ц. 40 к.

Вѣковыя возмущенія большой полуоси третьяго порядка отн. массъ. Напечатано Академіею Наукъ. СПБ. 1881. Ц. 50 к.

Прямолинейная тригонометрія. Одобрено М. Н. П. Харьковъ 1884. Ц. 50 к.

Новый способъ извлеченія корней и рѣшенія уравненій всѣхъ степеней. 2 изданіе. Харьковъ 1886. Ц. 50 к.

Элементарная геометрія и приложеніе алгебры къ геометріи. Съ 401 зад. Харьковъ 1887. Ц. 75 к. съ пересылкою.

О прочности солнечной системы. Харьковъ 1888. Ц. 50 к.

Nouvelle méthode de déterminer les orbites des planètes et des comètes. Charkow. 1888. Ц. 1 р.

Выписка изъ журнала Уч. К. утвержд. Г. Мин. Н. П. 10 Октября 1886 г.

„Рукопись, представленная А. Веребрюсовымъ на разсмотрѣніе Ученаго Комитета, весьма богата содержаніемъ при сравнительно небольшомъ объемѣ. Въ ней соединенъ курсъ элементарной геометріи съ приложеніемъ алгебры къ геометріи и сверхъ того включены начала аналитической геометріи, а именно: понятіе о прямоугольныхъ координатахъ, уравненіе прямой линіи и круга и примѣненіе ихъ къ рѣшенію нѣкоторыхъ задачъ. Курсъ элементарной геометріи въ этой рукописи на столько подробенъ, что заключаетъ въ себѣ не только все, требуемое программами среднихъ учебныхъ заведеній, но и многія теоремы и задачи, соотносящіяся до центровъ подобія прямолинейныхъ фигуръ и круговъ, до обратныхъ точекъ, радикальныхъ осей и т. п. Изложеніе довольно систематично, кратко и ясно“.